Wielkości wprost proporcjonalne

W materiale wprowadzimy definicję wielkości wprost proporcjonalnych, wskażemy przykłady oraz pokażemy sposoby wyznaczania tych wielkości. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Błyskawica, czyli piorun, jest silnym wyładowaniem elektrostatycznym, które towarzyszy burzy. Grzmot można usłyszeć nawet w odległości $40\ \text{km}$ od miejsca uderzenia pioruna. Aby dowiedzieć się, w jakiej odległości uderzył piorun, wystarczy policzyć sekundy dzielące pojawienie się pioruna od wystąpienia grzmotu. Jeśli są to 3 sekundy, to wówczas wiemy iż piorun pojawił się $1000\ \text{m}$ od nas, a jeśli 5 sekund, to wówczas wiemy, iż piorun pojawił się w odległości około $1700\ \text{m}$ od nas. Możemy zauważyć, że istnieje zależność między czasem po jakim uderza piorun, a odległością uderzenia pioruna.

Źródło: Grafika na podstawie:Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Twoje cele

- Określisz, czy podane wielkości są wprost proporcjonalne.
- Podasz przykłady wielkości wprost proporcjonalnych.
- Zapiszesz zależność między wielkościami wprost proporcjonalnymi za pomocą proporcji.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

W życiu codziennym spotykamy się z wieloma sytuacjami, w których iloraz pewnych wielkości jest stały np.:

- odległość na mapie i odpowiadająca jej odległość w terenie,
- masa truskawek i wartość zakupionych truskawek,
- ilość potrzebnej mąki oraz liczba upieczonych bochenków chleba.

Do wyznaczenia zależności pomiędzy tymi wielkościami służą proporcje.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$a : b$ – iloraz liczb a i b, gdzie $b \neq 0$,
$c : d$ – iloraz liczb c i d, gdzie $d \neq 0$.

Wówczas równość dwóch ilorazów $a : b = c : d$ określa się proporcją, gdzie liczby a i d nazywamy wyrazami skrajnymi, a liczby b i c wyrazami środkowymi.

Mówimy wtedy, że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych, co zapisujemy następująco:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, co jest równoważne równaniu $a \cdot d = b \cdot c$,

Przy użyciu proporcji możemy sprawdzić, czy wielkości są wprost proporcjonalne.

Przeanalizujmy dane przedstawione w poniższej tabeli.

Liczba zeszytów	Koszt zakupu zeszytów
1	4 zł
3	12 zł
10	40 zł

Zauważmy, że wraz ze wzrostem liczby zeszytów, koszt ich zakupu rośnie tyle samo razy. Po podzieleniu dowolnej kwoty z dolnego wiersza tabelki przez odpowiadającą jej liczbę zeszytów zawsze otrzymujemy taki sam wynik.
Wprowadźmy definicję wielkości, które są wprost proporcjonalne.

> **Definicja: wielkości wprost proporcjonalne**
>
> Dane są dwie dodatnie wielkości. Mówimy, że te wielkości są wprost proporcjonalne, jeżeli iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości jest stały.
> **Ważne!**
>
> Wielkościami wprost proporcjonalnymi nazywamy dwie wielkości zmieniające się w taki sposób, że wzrost lub zmniejszanie się jednej powoduje wzrost lub zmniejszanie się drugiej tyle samo razy.

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są na przykład:

- długość boku kwadratu i jego obwód,
- waga ziemniaków i koszt ich zakupu,
- długość drogi i czas potrzebny na jej przebycie przy stałej prędkości.

> **Przykład 1**
>
> Sprawdzimy, czy wielkości a i b podane w tabeli są wprost proporcjonalne.
>
> | a | b |
> |---|---|
> | 4 | 18 |
> | $\frac{1}{2}$ | $2,25$ |
> | 6 | 27 |

Rozwiązanie:
Obliczymy ilorazy danych wielkości i sprawdzimy, czy są one równe. Otrzymujemy zatem:
$\frac{18}{4} = 4,5,$
$\frac{2{,}25}{\frac{1}{2}} = 2,25 \cdot 2 = 4,5,$
$\frac{27}{6} = 4,5.$
Ponieważ ilorazy odpowiadających sobie wartości wielkości a i b są równe, zatem wielkości te są wprost proporcjonalne.
Przykład 2

W tabeli przedstawiono wielkości a i b, które są wprost proporcjonalne. Wyznaczymy wartości liczb k i l.

a	b
5	8
k	$17,6$
$3,2$	l

Rozwiązanie:
Ponieważ wielkości a i b są wprost proporcjonalne, zatem:
$\frac{5}{8} = \frac{k}{17{,}6}$, czyli
$5 \cdot 17,6 = 8 \cdot k$
$8k = 88$
$k = 11$
$\frac{5}{8} = \frac{3{,}2}{l}$
$5 \cdot l = 8 \cdot 3,2$
$5l = 25,6$
$l = 5,12$
Przykład 3

Słoń porusza się z prędkością $15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Obliczymy:

a. jaką drogę przebędzie słoń w czasie 18 s,
b. po jakim czasie słoń przebędzie drogę długości 180 m.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że długość drogi, jaką pokonuje słoń jest wprost proporcjonalna do upływającego czasu.
Prędkość $15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ oznacza, że słoń w ciągu 1 s pokonuje drogę długości 15 m.

a. Niech s będzie długością drogi (wyrażoną w metrach), jaką przebędzie słoń w czasie 18 s.
   Zatem:

$\frac{15}{1} = \frac{s}{18}$

Wobec tego:

$s = 15 \cdot 18 = 270$

W ciągu 18 s słoń przebędzie drogę długości 270 m.

b. Niech t będzie czasem (wyrażonym w sekundach), po jakim słoń przebędzie drogę długości 180 m.

Zatem:

$\frac{15}{1} = \frac{180}{t}$

Wobec tego:

$15 \cdot t = 180$

$t = 12$

Słoń przebędzie drogę długości 180 m w ciągu 12 s.

Przykład 4

Zauważmy, że jeśli dwie dodatnie wielkości x i y są wprost proporcjonalne, to zachodzi następująca zależność:

$y = a \cdot x$, gdzie a jest pewną stałą.

Wykażemy, że zachodzą następujące zależności: $a = \frac{y}{x}$ oraz $x = \frac{y}{a}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ pomiędzy wielkościami wprost proporcjonalnymi zachodzi zależność:

$y = a \cdot x$, zatem:

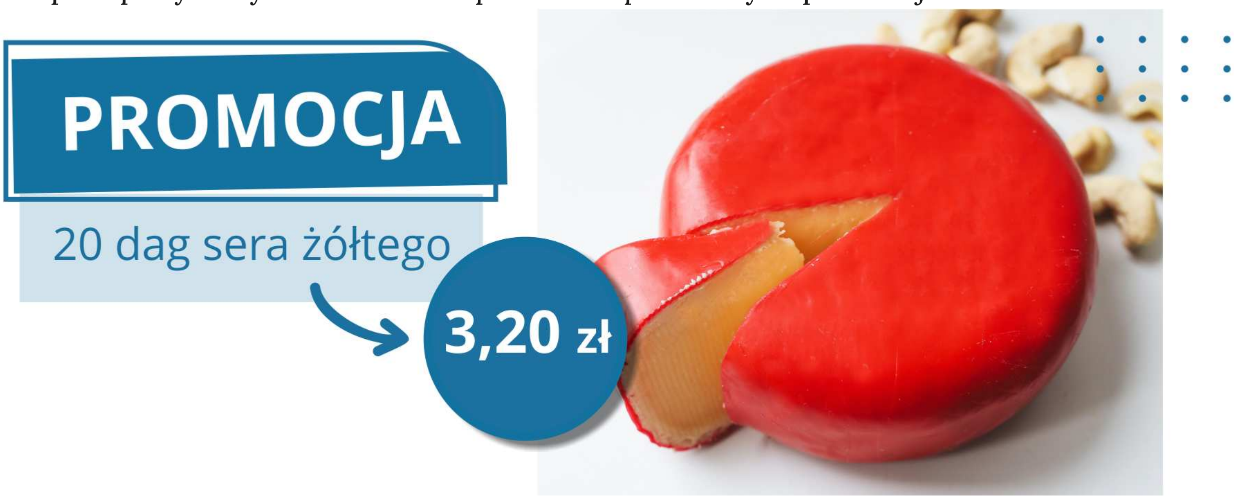
- po podzieleniu obu stron tej równości przez liczbę x otrzymujemy, że $a = \frac{y}{x}$,
- po podzieleniu obu stron tej równości przez liczbę a otrzymujemy, że $x = \frac{y}{a}$.

Ciekawostka

Liczbę a, która wyraża zależność $a = \frac{y}{x}$ pomiędzy dodatnimi wielkościami x i y nazywamy współczynnikiem proporcjonalności.

Przykład 5

W sklepie spożywczym można zakupić różne produkty w promocji.



Źródło: Grafika na podstawie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Obliczymy, ile trzeba zapłacić za $1,5$ kg sera żółtego.

Rozwiązanie:

Wiadomo, że $1,5$ kg $= 150$ dag.

Przedstawmy dane z zadania w tabeli:

Waga (dag)	**Cena** (zł)
20	$3,20$
150	x

Układamy i rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$\frac{20}{3{,}20} = \frac{150}{x}$

Zatem $20 \cdot x = 3,2 \cdot 150$, czyli
$x = \frac{3{,}2 \cdot 150}{20} = \frac{48}{2} = 24$

Zatem za $1,5$ kg sera żółtego trzeba zapłacić 24 zł.
Przykład 6

Sznurek rozcięto na dwa mniejsze kawałki, których stosunek długości wynosi $3 : 7$. Wyznaczymy, jaka jest długość każdej części, jeżeli mniejsza część jest o 16 krótsza od większej części.

Rozwiązanie:
Wprowadźmy następujące oznaczenia:
x – długość krótszej części sznurka
$x + 16$ – długość dłuższej części sznurka
Układamy i rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:
$\frac{3}{7} = \frac{x}{x+16}$, zatem $7 \cdot x = 3 \cdot (x + 16)$
$7x = 3x + 48$
$4x = 48$
$x = 12$
Po rozwiązaniu równania otrzymujemy, że $x = 12$, zatem krótsza część sznurka ma długość 12, a dłuższa 28.

Notatnik

Miejsce na Twoje notatki

Animacja

Zapoznaj się z animacją dotyczącą wielkości wprost proporcjonalnych, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Film dostępny pod adresem /preview/resource/R9X1X6BFh1ssv

Animacja przedstawia przykłady wielkości wprost proporcjonalnych.

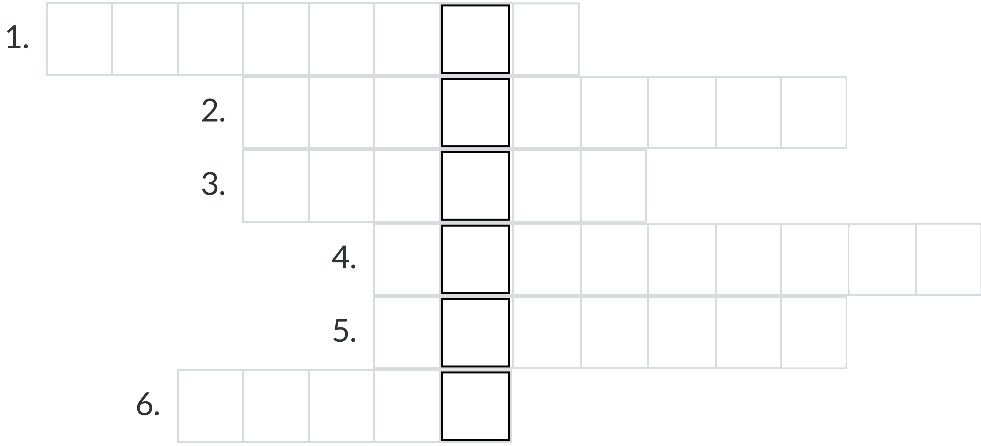
Polecenie 1

W tabeli przedstawiono wielkości a i b, które są wprost proporcjonalne. Wyznacz wartości liczb m i n.

a	b
12	5
m	3
$28,8$	n

Polecenie 2

Rozwiąż krzyżówkę.



1. Jeżeli liczby są wprost proporcjonalne, to każda z tych liczb jest ...
2. Mogą być wprost proporcjonalne.
3. Zwiększanie wartości liczby.
4. Równość dwóch ilorazów.
5. Określana dla danej wielkości.
6. Skrajny lub środkowy w proporcji.

Polecenie 3

Na opakowaniu płynu do prania zaleca się użycie $140 \mathrm{~ml}$ na $1,5 \mathrm{~kg}$ bielizny do prania. Oblicz, ile płynu należy wlać do pralki o pojemności $6 \mathrm{~kg}$, jeżeli pralka jest wypełniona w całości.

Zestaw ćwiczeń interaktywnych

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawne dokończenie zdania. Wielkościami wprost proporcjonalnymi są

- ◯ długość boku kwadratu i jego pole.
- ◯ liczba kupowanych bochenków chleba i reszta, jaką otrzymujemy z podanej kwoty.
- ◯ liczba jednakowych butelek i objętość płynu, który możemy w nich pomieścić.

Ćwiczenie 2

Uzupełnij tekst odpowiednimi zwrotami. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz prawidłową odpowiedź.

Mówimy, że dwie ______ wielkości są wprost proporcjonalne, gdy wraz ze ______ jednej wielkości, druga wielkość rośnie tyle samo razy.

Mówimy, że dwie dodatnie wielkości są ______ proporcjonalne, gdy wraz ze ______ wartości jednej wielkości, druga wielkość maleje tyle samo razy.

odwrotnie | ujemne | spadkiem | wzrostem | dodatnie | wprost

Ćwiczenie 3

Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Wielkości, które są wprost proporcjonalne:

Wielkości, które nie są wprost proporcjonalne:

- obwód kwadratu i wartość jego pola
- prędkość i czas potrzebny na przejechanie ustalonego odcinka drogi
- długość boku kwadratu i długość jego przekątnej
- długość wysokości i długość boku trójkąta równobocznego
- długość boku kwadratu i kwadrat długości jego przekątnej
- długość promienia okręgu i jego obwód

Ćwiczenie 4

Które z podanych wielkości są wprost proporcjonalne? Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

- ☐ Masa ziemniaków i wartość ziemniaków.
- ☐ Długość boku rombu i jego obwód.
- ☐ Wzrost człowieka i jego waga.
- ☐ Czas przejazdu samochodu na określonym odcinku trasy i jego prędkość.

Ćwiczenie 5

Odpowiedz na pytania:

a. 50 kilogramów ziemniaków kosztuje 170 zł. Ile trzeba zapłacić za 12 kilogramów ziemniaków?

b. Żółw skórzasty w ciągu dwóch godzin pokonuje drogę długości $70\ \mathrm{km}$. Jaką drogę przebędzie po upływie $3,5\ \mathrm{h}$?

Ćwiczenie 6

Przeciągnij do tabeli odpowiednie liczby wiedząc, że wielkości a i b są wprost proporcjonalne.

a	b
30	75
	45
36	
48	

90 12 18 100 120 20

Ćwiczenie 7

Zaznacz zdanie prawdziwe.

- Liczby 0 i 1 są wprost proporcjonalne do każdej pary liczb dodatnich.
- Wielkości mogą być wprost proporcjonalne, gdy ich wartości są dodatnie.
- Istnieją wielkości wprost proporcjonalne, które są liczbami ujemnymi.

Ćwiczenie 8

Odpowiedz na pytania:

a. Na upieczenie 12 faworków potrzeba 360 g mąki. Ile mąki potrzeba na wykonanie 20 takich faworków?

b. Zegar na wieży spóźnia się 4 sekundy w ciągu 5 minut. Po jakim czasie spóźnienie będzie wynosiło $2,4$ minuty?

Słownik

proporcja

równość dwóch ilorazów liczb.

Bibliografia

Cewe A., Krawczyk M., Magryś-Walczak A., (2017), *Zamiast korepetycji z matematyki*, Gdańsk: Wydawnictwo Podkowa.

Gancarczyk R., (2021), *Egzamin ósmoklasisty - matematyka. Repetytorium*, Kraków: Wydawnictwo Greg.

Makowski A., Masłowski T., Toruńska A., (2017), *Podręcznik do matematyki dla klasy* 7 *szkoły podstawowej*, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.